

Mathematics

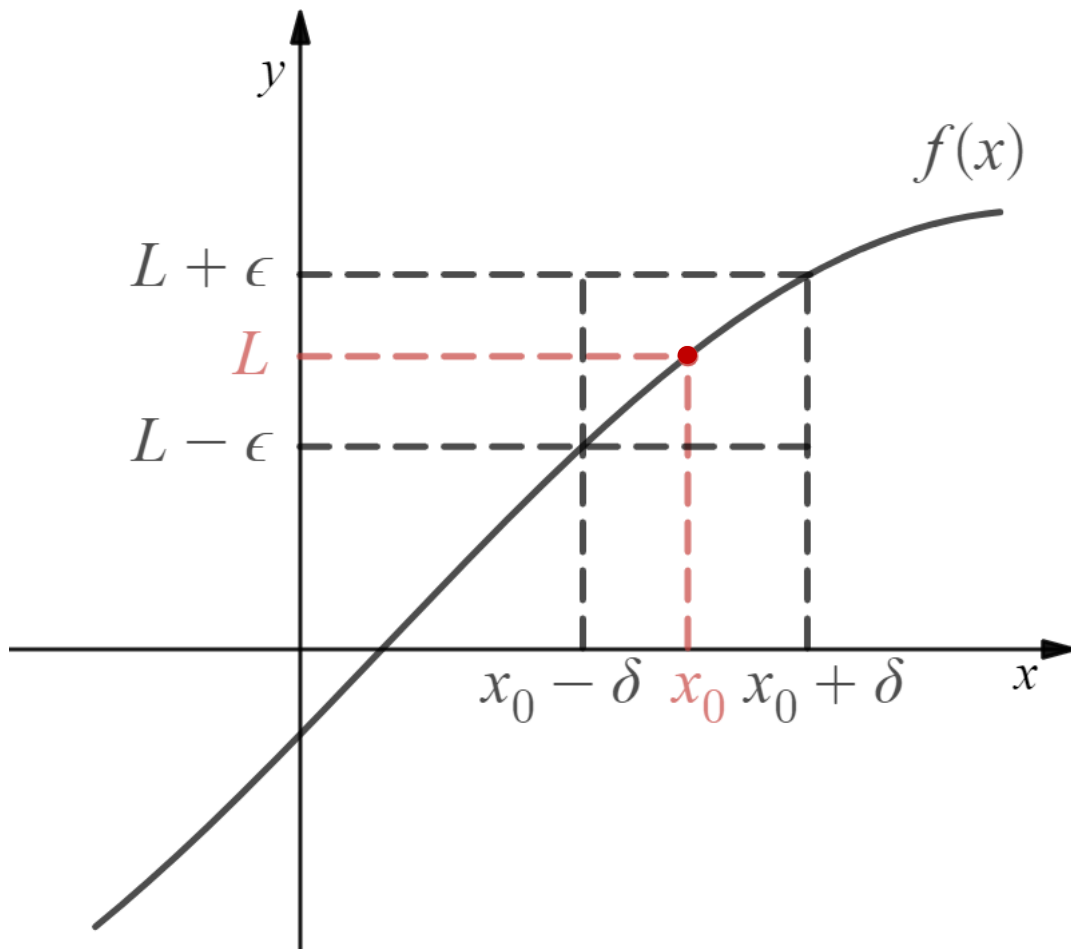
מבנים מתמטיקה

תקציר שיעור גבול של פונקציה

הגדרת הגבול

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x = x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. המספר L נקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- x_0 , אם לכל מספר $\varepsilon > 0$ קיים מספר $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$, מתקיים: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

סימון: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ או בקצרה $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L$



הגדרה

סביבה של הנקודה x_0 היא הקטע הפתוח (a, b) המכיל את הנקודה x_0 .

סביבה נקובה של נקודה x_0 היא הקטע הפתוח (a, b) המכיל את הנקודה x_0 , ללא x_0 עצמה.

סביבת δ של x_0 היא הקטע הפתוח $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ לכל $\delta > 0$.

סביבת δ נקובה של x_0 היא הקטע הפתוח $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ לכל $\delta > 0$.

משפט – גבול של פונקציה אלמנטרית

הפונקציות האלמנטריות מקיימות בתחום הגדרתן, שהגבול בנקודה שווה לערך הפונקציה בנקודה,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ : כלומר מתקיים:}$$

משפט יחידות הגבול

אם לפונקציה קיים גבול, אזי הוא יחיד.

משפטי גבול וערך מוחלט

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L| \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \quad (\text{ב})$$

משפט חסומה כפול אפסה

אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ו- $g(x)$ חסומה בסביבה נקובה של x_0 , אזי: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

משפט הסנדביץ'

אם לכל x בסביבה נקובה של x_0 מתקיים: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

ואם בנוסף $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$, אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

משפט הגבול המפורסם

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ : מתקיים הגבול הבא:}$$

משפט – אריתמטיקה של גבולות

חוקים בסיסיים

תהי פונקציה f המוגדרת בסביבת x_0 (פרט אולי לנקודה x_0 עצמה) ובעלת גבול סופי

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ ויהי קבוע } c \text{ כלשהו, אזי:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = cL \quad (\text{ב})$$

חוקים עיקריים

תהיינה פונקציות f ו- g המוגדרות בסביבת x_0 (פרט אולי לנקודה x_0 עצמה).

אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$, אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 + L_2 \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 L_2 \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{ג}) \text{ אם גם } L_2 \neq 0 \text{, אזי:}$$